

Estudios matemáticos
Nivel medio
Prueba 2

Jueves 12 de noviembre de 2015 (tarde)

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Para esta prueba, se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de estudios matemáticos NM**.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar un gráfico de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 14]

En una tienda venden bombones con sabor a fresa, con sabor a café y con sabor a naranja. A 50 clientes les preguntan al salir qué tipo de bombones han comprado.

Éstos fueron los resultados obtenidos:

Hubo 7 que compraron únicamente bombones de fresa
Hubo 6 que compraron únicamente bombones de café
Hubo 10 que compraron únicamente bombones de naranja
Hubo 3 que compraron de café y de fresa, **pero no** de naranja
Hubo 5 que compraron de fresa y de naranja, **pero no** de café
Hubo 4 que compraron de naranja y de café, **pero no** de fresa
Hubo x que compraron de fresa, de café y de naranja.

- (a) Represente esta información en un diagrama de Venn. [4]
- (b) Halle el valor de x , sabiendo que 13 de esos 50 clientes no compraron bombones. [2]
- (c) (i) Halle la probabilidad de que un cliente, elegido al azar de entre esos 50 clientes, haya comprado bombones con sabor a fresa.
- (ii) Halle la probabilidad de que un cliente, elegido al azar de entre esos 50 clientes, haya comprado bombones con sabor a naranja.
- (iii) Determine si los sucesos en los apartados (c)(i) y (c)(ii) son independientes. Dé una razón que justifique su respuesta. [6]
- (d) Se escoge un cliente al azar de entre estos 50 clientes. Sabiendo que el cliente compró bombones con sabor a café, halle la probabilidad de que también haya comprado bombones con sabor a fresa. [2]

2. [Puntuación máxima: 19]

La siguiente tabla muestra las notas de la evaluación interna y las notas del examen que han obtenido seis alumnos.

Nota de la evaluación interna (x puntos)	4	10	12	16	18	20
Nota del examen (y puntos)	35	45	52	55	65	70

- (a) **En un papel milimetrado**, dibuje con precisión un diagrama de dispersión que represente los datos anteriores. Utilice la siguiente escala: 1 cm para representar 2 puntos en el eje x y 1 cm para representar 10 puntos en el eje y . [3]
- (b) (i) Escriba para estos datos el coeficiente de correlación momento-producto de Pearson, r .
- (ii) Describa la correlación que existe entre las notas de la evaluación interna y las notas del examen. [4]
- (c) Halle
- (i) la media de las notas de la evaluación interna, \bar{x} ;
- (ii) la media de las notas del examen, \bar{y} . [2]
- (d) Sitúe y rotule el punto $M(\bar{x}, \bar{y})$ en el diagrama de dispersión del apartado (a). [2]
- (e) Escriba la ecuación de la recta de regresión de y sobre x . [2]
- (f) Utilice la **ecuación** obtenida en el apartado (e) para estimar la nota que sacará en el examen un alumno que haya obtenido 8 puntos en la evaluación interna. [2]
- (g) En el diagrama de dispersión del apartado (a) dibuje con precisión la recta de regresión de y sobre x . [2]
- Un **alumno nuevo** obtiene 30 puntos en la evaluación interna y utiliza los datos anteriores para estimar que obtendrá 89 puntos en el examen.
- (h) Indique si esta estimación es o no fiable y dé una razón que justifique su respuesta. [2]

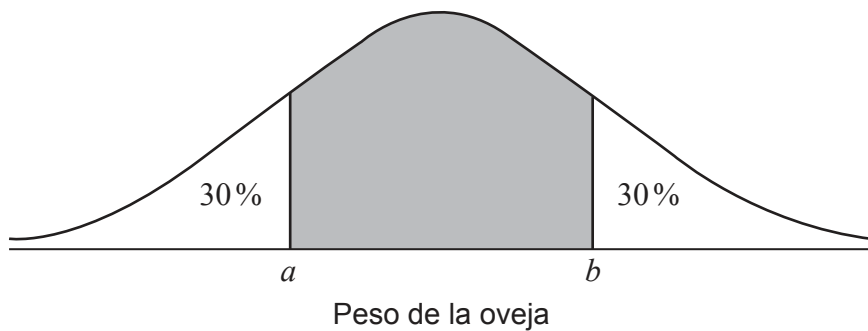
Véase al dorso

3. [Puntuación máxima: 13]

El peso de las ovejas de una granja sigue una distribución normal de media 110 kg y desviación típica igual a 8 kg.

- (a) Dibuje aproximadamente un diagrama que represente la distribución de los pesos de estas ovejas. En ese diagrama rotule la media y rotule una desviación típica por encima y por debajo de la media. [2]
- (b) (i) Una oveja tiene un peso de 94 kg. Escriba el número de desviaciones típicas que está este peso por debajo de la media.
(ii) Halle la probabilidad de que una oveja, elegida al azar, pese más de 94 kg. [3]
- (c) (i) Halle la probabilidad de que una oveja, elegida al azar, pese entre 88 kg y 116 kg.
(ii) El granjero pesa a 160 de sus ovejas. Halle el número de ovejas que él espera que pesen entre 88 kg y 116 kg. [4]
- (d) Sabiendo que el 75 % de las ovejas pesan **menos de** w kg, halle el valor de w . [2]

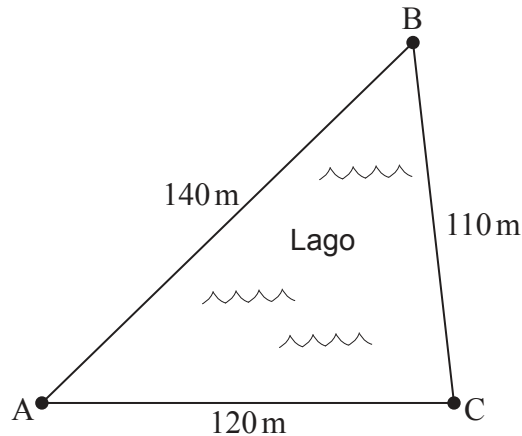
Se escoge una oveja al azar. Su peso cae dentro de la región sombreada central de la siguiente figura.



- (e) Halle el valor de a y el de b . [2]

4. [Puntuación máxima: 15]

Un lago tiene forma de triángulo, ABC, donde AB, BC y CA son caminos que rodean al lago. Las longitudes de estos caminos son las siguientes: $AB = 140\text{ m}$, $BC = 110\text{ m}$ y $CA = 120\text{ m}$.



la figura no está dibujada a escala

D

(a) Halle el valor del ángulo \hat{BAC} . [3]

(b) Halle el área del lago. [3]

Una granja se encuentra a una cierta distancia del lago, en el punto D, de modo tal que el ángulo \hat{DBC} mide 80° y el ángulo \hat{BCD} mide 40° . La granjera ha construido dos caminos rectos que van desde la granja, D, hasta los puntos B y C, respectivamente.

(c) Muestre que el ángulo $\hat{BDC} = 60^\circ$. [1]

(d) Halle la distancia que hay entre C y D. [3]

El tractor de la granjera se encuentra en el punto A, en la orilla opuesta del lago. La granjera va andando por los caminos rectos que salen de su granja, D, y que, rodeando el lago, llegan hasta el tractor en A.

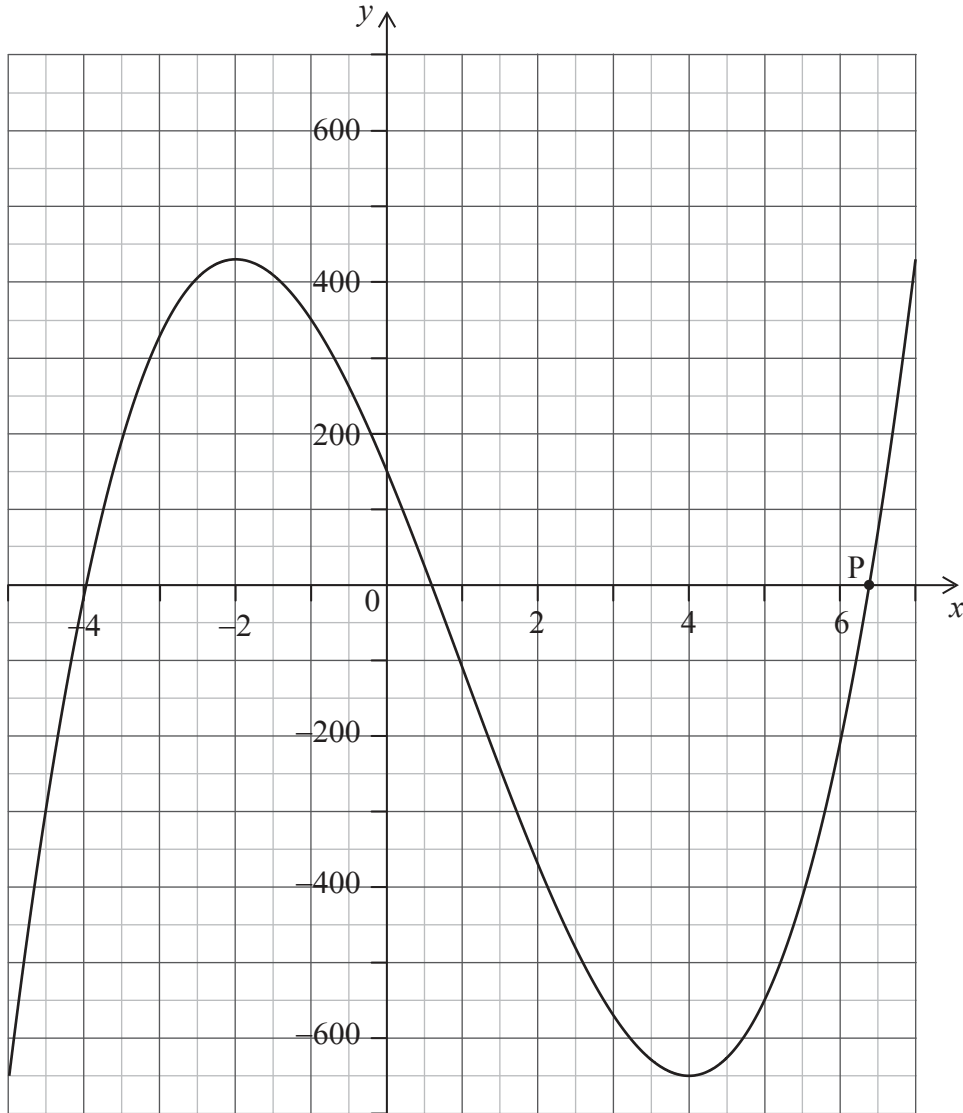
(e) Muestre que la ruta **más corta** posible que puede elegir la granjera pasa por el punto B. [5]

Véase al dorso

5. [Puntuación máxima: 17]

La siguiente figura muestra el gráfico de la función

$$f(x) = nx^3 + px^2 + qx + r, n \neq 0, \text{ para } -5 \leq x \leq 7.$$



(a) Indique si la función es creciente o decreciente en $x = -3$. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

(b) Escriba el valor de r . [1]

Los valores de p y q son tales que $f(x) = nx^3 - 30x^2 - 240x + r$.

(c) Halle $f'(x)$. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

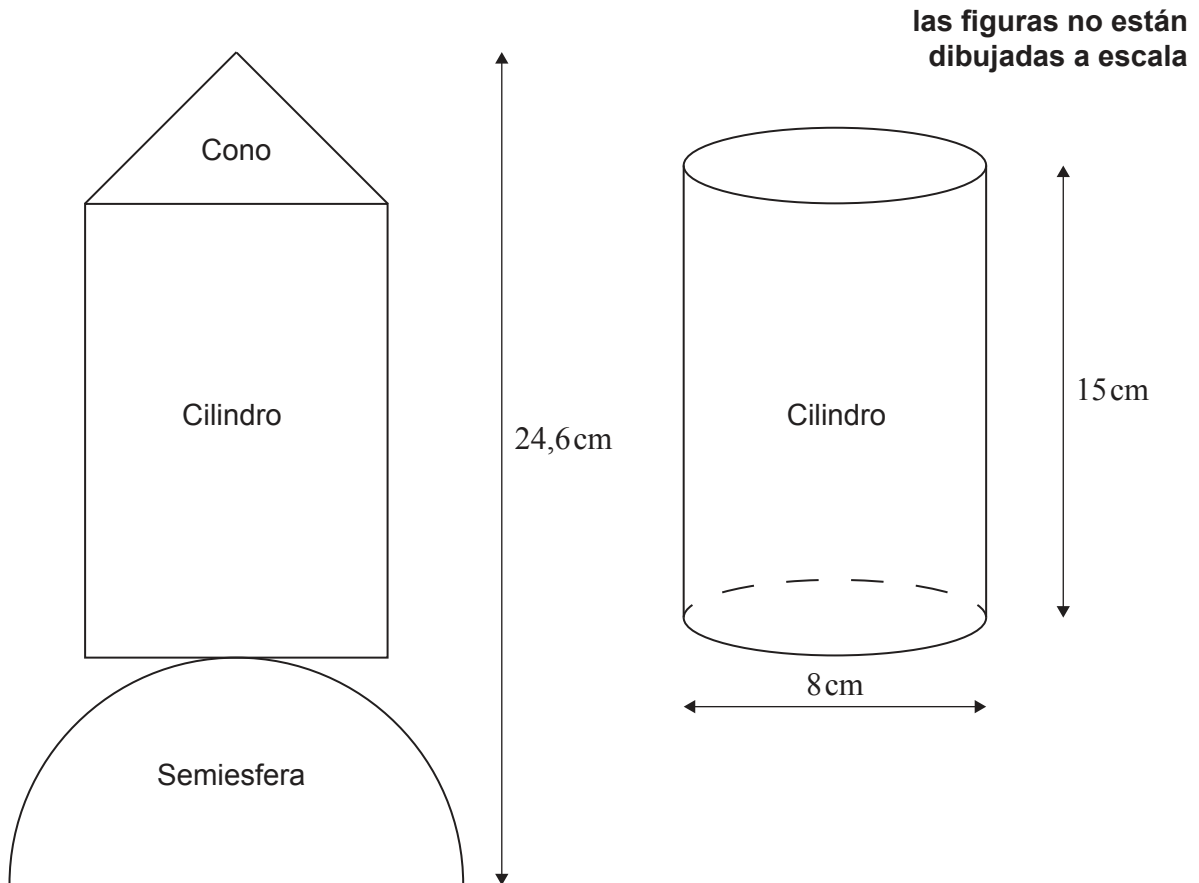
- (d) Escriba las coordenadas del mínimo local. [1]
- (e) Muestre que el valor de n es 10. [2]
- (f) (i) Calcule $f'(-1)$.
- (ii) Halle la ecuación de la tangente al gráfico en el punto $(-1, 350)$. Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$.
- (iii) Escriba cuál es la pendiente de la normal al gráfico en $x = -1$. [5]

El gráfico de la función corta al eje x en el punto P, tal y como se muestra en la figura.

- (g) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar la coordenada x de P. [1]
- (h) Sea $g(x) = 100x + 400$, para $-5 \leq x \leq 7$. Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$, dentro del dominio dado. [2]

6. [Puntuación máxima: 12]

Yutaka construye un cohete de juguete. Consta de tres partes sólidas diferenciadas: un cono, un cilindro y una semiesfera. Este juguete aparece representado en la siguiente figura bidimensional. El cilindro también se muestra en una figura aparte.



El cilindro tiene una altura de 15 cm y un diámetro de 8 cm.

- (a) Halle el volumen del cilindro. [2]

El cono tiene un diámetro de 8 cm y un volumen de 85 cm^3 .

- (b) Halle la altura del cono. [2]

El cohete de juguete tiene una altura total de 24,6 cm.

- (c) Halle el volumen de la semiesfera. [4]

Yutaka decide pintar el cono de su cohete de juguete.

- (d) Calcule el área lateral del cono. Dé la respuesta redondeando al número entero de cm^2 más próximo. [4]